**TRIANGLES PYTHAGORICIENS ET HERONIENS**

|  |  |
| --- | --- |
|  | On appelle **triangle pythagoricien** un triangle ABC rectangle en A pour lequel les mesures des côtés AB, AC et BC sont des nombres entiers naturels non nuls.  On appelle **triangle héronien** un triangle pythagoricien dans lequel si H est le projeté orthogonal de A sur (BC), alors de plus AH, BH et CH sont également des entiers naturels non nuls. |

***Déterminer les triangles pythagoriciens lorsque 1 ≤ AB ≤ 20 et 1 ≤ AC ≤ 20. Déterminer parmi eux au moins un triangle héronien.***

***Pour cela réaliser le tableau dont un extrait se trouve ci-dessous.***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | N | AB | AC | BC | Pythagoricien? | BH | AH | Héronien? | | 1 | 1 | 2 | 2,23606798 |  | 0,4472136 | 0,89442719 |  | | 2 | 1 | 3 | 3,16227766 |  | 0,31622777 | 0,9486833 |  | | 3 | 1 | 4 | 4,12310563 |  | 0,24253563 | 0,9701425 |  | |
| |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | 280 | 15 | 1 | 15,0332964 |  | 14,9667774 | 0,99778516 |  | | 281 | 15 | 2 | 15,132746 |  | 14,8684185 | 1,9824558 |  | | 282 | 15 | 3 | 15,2970585 |  | 14,7087101 | 2,94174203 |  | | 283 | 15 | 4 | 15,5241747 |  | 14,4935241 | 3,86493976 |  | | 284 | 15 | 5 | 15,8113883 |  | 14,2302495 | 4,74341649 |  | | 285 | 15 | 6 | 16,1554944 |  | 13,9271504 | 5,57086015 |  | | 286 | 15 | 7 | 16,5529454 |  | 13,5927471 | 6,34328198 |  | | 287 | 15 | 8 | 17 | OUI | 13,2352941 | 7,05882353 |  | | 288 | 15 | 9 | 17,4928557 |  | 12,8623939 | 7,71743633 |  | | 289 | 15 | 10 | 18,0277564 |  | 12,4807544 | 8,32050294 |  | | 290 | 15 | 11 | 18,6010752 |  | 12,0960749 | 8,87045495 |  | | 291 | 15 | 12 | 19,2093727 |  | 11,7130321 | 9,37042571 |  | | 292 | 15 | 13 | 19,8494332 |  | 11,3353362 | 9,82395808 |  | | 293 | 15 | 14 | 20,5182845 |  | 10,965829 | 10,2347738 |  | | 294 | 15 | 15 | 21,2132034 |  | 10,6066017 | 10,6066017 |  | | 295 | 15 | 16 | 21,9317122 |  | 10,2591169 | 10,9430581 |  | | 296 | 15 | 17 | 22,6715681 |  | 9,92432456 | 11,2475678 |  | | 297 | 15 | 18 | 23,430749 |  | 9,60276599 | 11,5233192 |  | | 298 | 15 | 19 | 24,2074369 |  | 9,29466433 | 11,7732415 |  | | 299 | 15 | 20 | 25 | OUI | 9 | 12 | OUI | | 300 | 16 | 1 | 16,0312195 |  | 15,9688413 | 0,99805258 |  | | 301 | 16 | 2 | 16,1245155 |  | 15,876446 | 1,98455575 |  | |

**AIDE :**

La relation de Pythagore s’écrit : + = . Les relations métriques dans un triangle rectangle s’écrivent : BH × BC =  ; CH× CB = et BH × CH = (démontrer ces relations si vous ne les avez pas encore rencontrées….).

En particulier BH = Si BC et BH sont entiers, CH sera automatiquement un entier (CH = BC – BH).

Et HA = .

Sur EXCEL, la fonction **= ENT(A)** donne l’entier immédiatement inférieur à A et la fonction **=MOD(A ;B)** donne le reste de la division de A par B.

La fonction **= RACINE(A)** donne la racine carrée du nombre A.

Revoir également les instructions conditionnelles vues dans les autres T.P. le plus généralement **=SI(condition ;valeur si Oui ;valeur si NON)** et en particulier celles utilisant plusieurs conditions comme **=SI (ET (1ère condition ;2ème condition) ;Valeur si OUI ;valeur si NON) .**

Le plus souvent, si AB et AC sont entiers, BC = est irrationnel, …. mais BC est entier si ,et seulement si, BC = ENT(BC)….

**SOLUTION :**

Remplir la 1ère ligne comme indiqué sur l’extrait. Dans la colonne A mettre 1 en A2, 2 en A3 puis en tirant vers le bas la suite des entiers naturels de 1 à 400.

En B2 mettre =ENT(A2/20)+1. Puis en C2, mettre =MOD(A2;20)+1

En D2, calculer BC, et pour cela mettre =RACINE(B2^2+C2^2)

En E2, on teste si le triangle considéré est pythagoricien. Mettre =SI(D2=ENT(D2);"OUI";"")

En F2, mettre =B2^2/D2 (qui calcule BH)

En G2, calculer AH ,et pour cela mettre =RACINE(F2\*(D2-F2))

En H2, tester si le triangle considéré est héronien. Pour cela mettre : =SI(ET(E2="OUI";F2=ENT(F2);G2=ENT(G2));"OUI";"")

**REPONSE :**

Avec 1 ≤ AB ≤ 20 et 1 ≤ AC ≤ 20 on trouvera 14 triangles pythagoriciens dont deux triangles héroniens mais il est évident qu’on retrouve chaque triangle sous la forme (AB,AC) et (AC,AB).

***Sont pythagoriciens :***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | | **AB** | **AC** | **BC** | | 3 | 4 | 5 | | 4 | 3 | 5 | | 5 | 12 | 13 | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 6 | 8 | 10 | | 8 | 6 | 10 | | 8 | 15 | 17 | | 9 | 12 | 15 | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 12 | 5 | 13 | | 12 | 9 | 15 | | 12 | 16 | 20 | | 15 | 8 | 17 | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 15 | 20 | 25 | | 16 | 12 | 20 | | 20 | 15 | 25 | |  |  |  | |

***Sont héroniens*** : là encore c’est le même triangle sous forme (AB,AC) puis (AC,AB) :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **AB** | **AC** | **BC** | **BH** | **CH** | **AH** |
| 15 | 20 | 25 | 9 | 16 | 12 |
| 20 | 15 | 25 | 16 | 9 | 12 |

**Remarque :** on peut démontrer que les triangles pythagoriciens sont ceux pour qui il existe des entiers k, u ,v tels que AB = k( - ) ; AC = 2 k u v ; BC = k( + ).